Функция нескольких переменных

Область определения, линии уровня, частные производные

Тлеулесова Айгеим Мекемтасовна

Цель лекции

- Сформировать у студентов понимание основных понятий функций нескольких переменных, их области определения, линий уровня и частных производных.

Основные вопросы

- Понятие функции нескольких переменных
- Область определения
- Линии уровня
- Частные производные первого и второго порядка

Функция нескольких переменных

- Функция двух переменных – это соответствие

$z = f(x, y)$, которое каждой паре чисел (x, y) ставит в соответствие одно число z.

- Геометрически — это поверхность в пространстве.

$y \geq -\frac{2}{3}$

Область определения

- Область определения — множество значений (x, y), при которых функция имеет смысл.

- Например:

Найти область определения функции

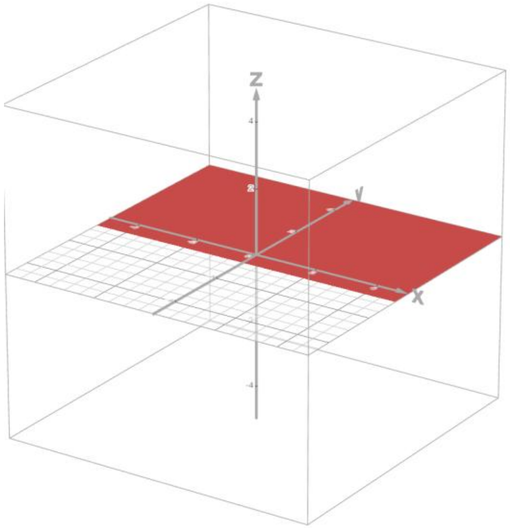
$$f(x;y) = \sqrt{3y+2}$$

Решение: подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3y + 2 \geq 0$$

$$3y \geq -2$$

$$y \geq -\frac{2}{3}$$



Ответ: полуплоскость

Линии уровня

Определение: Линией уровня функции $z = f(x;y)$ называется линия $f(x;y) = C$ на плоскости XOY, в каждой точке которой функция сохраняет постоянное значение: $z = C = const$

Пример 1. Найти и построить несколько линий уровня графика функции

$z = (x-2)^2 + (y-1)^2$

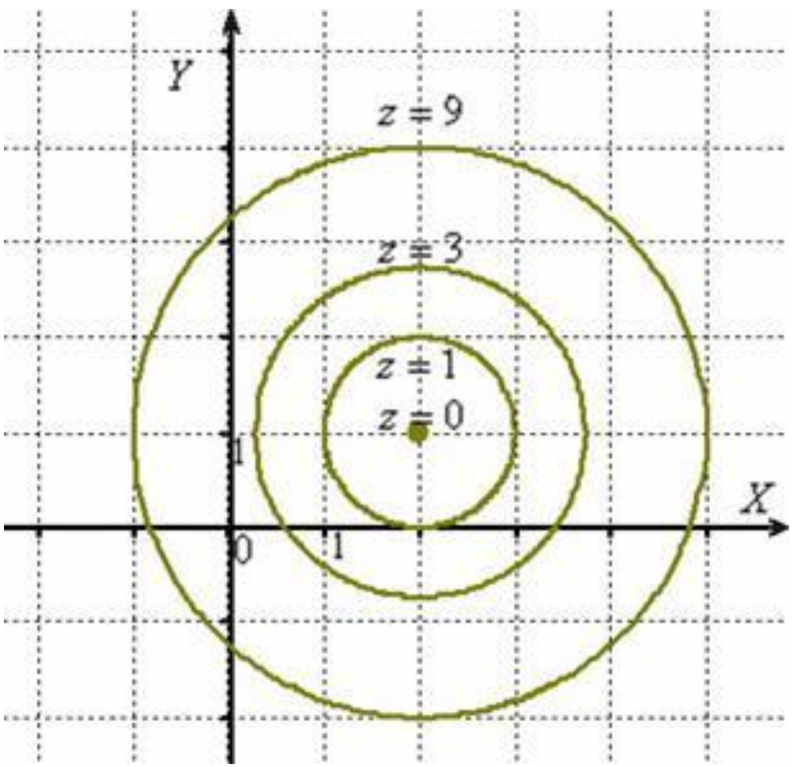
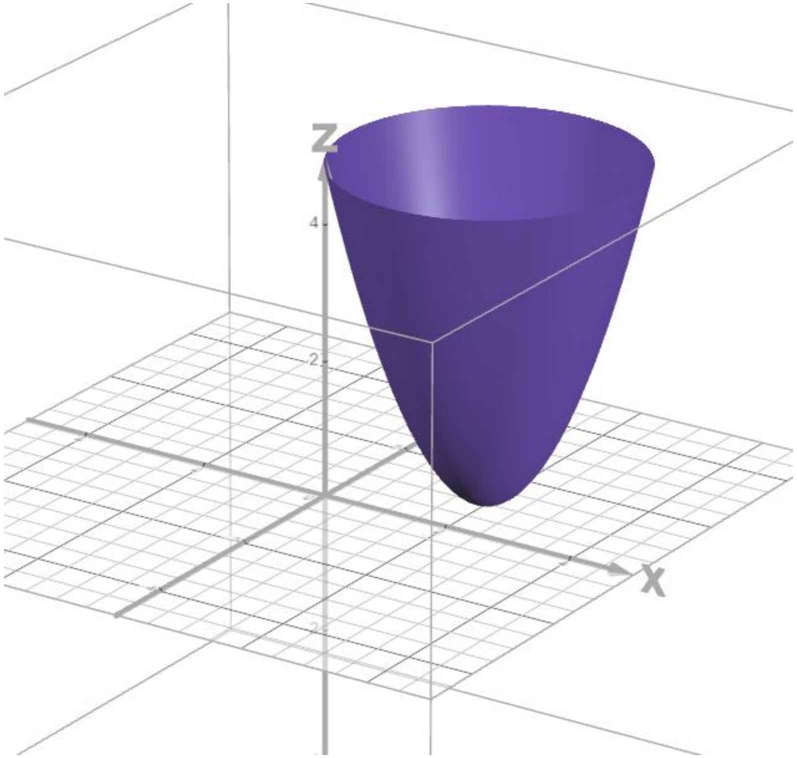


График поверхности

$$(x-2)^2+(y-1)^2=z$$



Определение. Число А называется пределом функции $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x и y ($x \neq x_0$ и $y \neq y_0$) и удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

Записывают: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ или $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$

Частные производные

- Частная производная по x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

- Частная производная по y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Если z'_x и z'_y дифференцируемые функции,

то можно вычислить частные производные

второго порядка. Их четыре

$z''_{xx} = (z'_x)'_x \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y$ – смешанная производная

$z''_{yy} = (z'_y)'_y \quad z''_{yx} = (z'_y)'_x$ – смешанная производная

Контрольные вопросы

- 1. Дайте определение функции нескольких переменных.
- 2. Что называется областью определения функции?
- 3. Что такое линия уровня?
- 4. Как определяется частная производная?
- 5. Какие линии уровня могут быть у функции

$x^2 + y^2$?

Рекомендуемая литература

- • Демидович Б.П., Марон И.А. Основы математического анализа.
- • Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального анализа.
- • Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Теория функций.
- • Краснов М.Л. Сборник задач по матанализу.